

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <http://www.researchgate.net/publication/279957681>

# SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE RIEMANN PARA LAS ECUACIONES DE FLUJO POCO COMPRESIBLE

CONFERENCE PAPER · JUNE 2015

---

DOWNLOADS

2

---

VIEWS

3

## 2 AUTHORS:



**Joan Soler**

University of the Republic, Uruguay

**14** PUBLICATIONS **6** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)



**P. Gamazo**

University of the Republic, Uruguay

**6** PUBLICATIONS **13** CITATIONS

[SEE PROFILE](#)

## SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE RIEMANN PARA LAS ECUACIONES DE FLUJO POCO COMPRESIBLE

J. Soler <sup>1\*</sup> y P. Gamazo <sup>2</sup>

1: Departamento del agua  
Regional Norte  
Universidad de la República  
c/ General Rivera 1350, 50.000-Salto, Uruguay  
e-mail: jsoler@unorte.edu.uy

2: Departamento del agua  
Regional Norte  
Universidad de la República  
c/ General Rivera 1350, 50.000-Salto, Uruguay  
e-mail: gamazo@unorte.edu.uy

**Palabras clave:** CFD, Riemann solvers, Método de los volúmenes finitos, Flujo lámina libre.

**Resumen** *Se presentan las ecuaciones de flujo poco compresible (SCFE) y se plantea el problema de Riemann para discontinuidades. Se propone una solución a dicho problema que también puede ser aplicada a la interfase entre fluidos en contacto como en el caso del flujo en lámina libre. El solver es utilizado para el cálculo del flujo numérico de Godunov en un esquema de volúmenes finitos de primer orden. Se dan algunos ejemplos de aplicación del método en diferentes campos de la mecánica de fluidos. Las SCFE pueden ser consideradas como una adaptación de las ecuaciones del flujo de Navier-Stokes (NSE) a fluidos poco compresibles como el agua o el aire en condiciones ambientales normales y son aplicables al flujo en lámina libre a baja presión y bajos números de Mach donde el proceso de compresión puede considerarse adiabático e isotérmico. Cuando se dan estas condiciones, se simplifica la solución del problema de Riemann. Someramente, dicha adaptación consiste en tomar la ley de elasticidad de Hooke, aplicarla a fluidos y tomarla como ecuación de clausura en el sistema de NSE. A diferencia de las ecuaciones de flujo incompresible, las SCFE mantienen la masa y la cantidad de movimiento como variables dependientes, con lo que las leyes de conservación mantienen el sentido físico de ley conservativa. Esta característica resulta importante porque las formulaciones conservativas solo en sentido puramente matemático producen soluciones erróneas en presencia de discontinuidades. Las SCFE constituyen un sistema que puede ser resuelto mediante un esquema numérico totalmente explícito que obtiene el campo de presiones/densidades de forma acoplada con el de velocidades a cada paso de tiempo, pudiendo “capturar” el transitorio. Tales características hacen que el planteamiento altamente paralelizable.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Habitualmente, algunas estructuras presentes en los canales en lámina libre tienen la doble función de regular para distribuir el flujo y medir los caudales circulantes para que la distribución sea equitativa. Curiosamente, en los canales de regadío, estas dos funciones las realizan estructuras diferentes [1]. Así, por ejemplo, en algunos canales españoles se utilizan aforadores Parshall en línea además de compuertas para la regulación. Esta aparente redundancia de estructuras se justifica por la falta de precisión de los modelos hidráulicos bajo determinadas condiciones de flujo.

Trabajos recientes en calibración de modelos de compuertas radiales como [2] y [3] o modelos de compuertas verticales como [4] y [5] indican que los procedimientos no son suficientemente precisos en ciertas condiciones de sumergencia, la situación más habitual. Además, en presencia de múltiples compuertas funcionando en paralelo en las almenaras, la medición del flujo presenta problemas adicionales de aparición de vórtices aguas abajo de las mismas [6]. Esta problemática justifica plenamente la redundancia de estructuras mencionada y puede ser la causa de que los modelos de aforo propuestos resulten imprecisos.

Cuando el nivel de aguas abajo de la almenara en el canal es alto, el resalto generado en las compuertas queda inundado. El chorro de agua bajo compuerta queda superpuesto por una masa de agua que no tiene un movimiento neto claro en ninguna dirección [7] con lo que el flujo presenta remolinos en el plano vertical. Por otro lado, las compuertas trabajando en paralelo y con aberturas diferentes generan vórtices aguas abajo en el plano horizontal. La presencia de remolinos en todos los planos de la cuenca de la almenara situada aguas abajo de las compuertas genera un flujo claramente en 3D.

Una posible respuesta a la problemática descrita en los párrafos anteriores, es la construcción de un modelo de flujo a través de una almenara basado en las ecuaciones de Navier-Stokes en 3D. Con esta herramienta, sería posible estudiar el fenómeno con más detalle y poder mejorar los modelos unidimensionales de aforo. Por otro lado, la aparición de técnicas de programación en paralelo en máquinas cada vez más potentes hace pensar en la posibilidad de utilizar directamente el propio modelo 3D como herramienta de aforo.

En [8] se puso de manifiesto que la utilización de esquemas numéricos totalmente explícitos aplicados al flujo en lámina libre en 2D son altamente paralelizables y reducen el tiempo de resolución sustancialmente. Con la misma idea en mente, en el presente trabajo se plantean de unas nuevas ecuaciones, las denominadas *ecuaciones de flujo poco compresible (SCFE)*, que son una adaptación de las ecuaciones para flujo compresible al flujo incompresible (o poco compresible). En estas nuevas ecuaciones, el campo de presiones no se calcula de forma desacoplada del de velocidades, sino que viene implícito en el campo de densidades, el cual se actualiza explícitamente en cada paso de tiempo. De este modo, podría decirse que la información del campo de presiones está contenido en el de densidades y el esquema final resulta totalmente explícito y paralelizable. Este enfoque permite reproducir el movimiento de

los frentes de presión en el tiempo en caso de desearse, y no solo como vía para calcular el estado estacionario final.

Otra importante característica del flujo en almenaras es la presencia de fuertes gradientes de velocidad y presión. Una discretización numérica que posibilitara su captura debería ser muy costosa y detallada en los puntos donde estos gradientes existieran. En opinión de los autores de esta comunicación, el flujo en tales circunstancias puede considerarse discontinuo y se podría obtener mejores resultados en la modelización si se adoptara dicha hipótesis. Se propone utilizar el “método de captura de ondas de choque” [9] que se basa en la solución débil de las ecuaciones.

En las páginas 111 y 112 de [10] se asegura que las cantidades “a conservar” que aparecen en las formulaciones que solamente son conservativas en sentido puramente matemático, producen velocidades equivocadas en presencia de ondas de choque y por lo tanto, soluciones erróneas. En la formulación clásica para fluidos incompresibles, las variables dependientes masa y velocidad son las conservadas. No tiene sentido físico “conservar la velocidad” aunque proceda de una ley de conservación de la cantidad de movimiento. En cambio, la formulación presentada aquí tiene la masa y la cantidad de movimiento como variables dependientes a conservar, lo que significa una importante ventaja de las SCFE frente a la formulación clásica.

Después de esta introducción, se presentan las SCFE y la solución al problema de Riemann, se utiliza esta solución para el cálculo de los flujos numéricos de Godunov en un esquema de volúmenes finitos de primer orden y finalmente, se dan tres ejemplos de aplicación y verificación de las ecuaciones presentadas.

## 2. ECUACIONES DE FLUJO POCO COMPRESIBLE

### 2.1.- Condición de clausura: la ley de Hooke

Una masa de fluido denotada por  $m$  está confinada dentro de un recipiente de volumen  $V_0$  bajo una presión  $P_0$  y tiene una densidad  $\rho_0 = m/V_0$  (Figura 1) y se le somete a una nueva presión  $P = P_0 + \Delta p = P_0 + \Delta F/S$ . Por consiguiente, la masa es comprimida, aumenta su densidad al nuevo valor  $\rho$  y reduce el volumen ocupado al valor  $V$ .

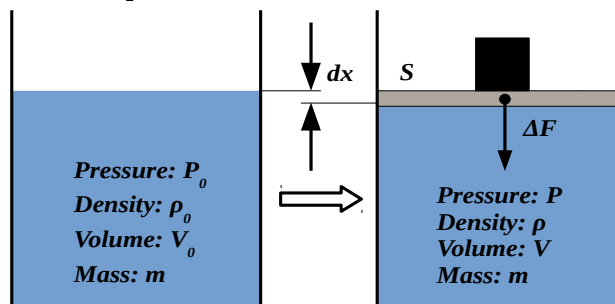


Figura 1: Esquema para la deducción de la ecuación de estado.

La cuestión es obtener una relación entre la presión y la densidad, esto es, la ecuación de estado. Teniendo en cuenta el principio de conservación de la masa, se obtiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria (EDO):

$$dm=0 \rightarrow d(\rho \cdot V)=0 \rightarrow \rho \cdot dV + V \cdot d\rho=0 \rightarrow -\frac{V}{dV} = \frac{\rho}{d\rho} \quad (1)$$

Multiplicando ambos lados de (1) por  $d\rho$  obtenemos:

$$-V \frac{d\rho}{dV} = \rho \frac{d\rho}{d\rho} = K$$

donde  $K$  es el módulo de compresibilidad. Esta ecuación puede reescribirse como la ley de Hooke para medios continuos en fluidos de la siguiente manera:

$$dp = c(\rho)^2 d\rho \quad (2)$$

donde  $c(\rho)$  es la celeridad de la onda:

$$c(\rho) = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Valores de referencia de estos parámetros que han sido utilizados en los ejemplos numéricos posteriores pueden verse en la Tabla 1.

<b>Presión de referencia: <math>P_0=101.325kPa</math> Temperatura de referencia: <math>T_0=15^\circ C</math></b>	<b>Agua</b>	<b>Aire</b>
Módulo de compresibilidad ( $K$ )	$K_w=2,2 \cdot 10^9 (Pa)$	$K_A=1,42 \cdot 10^5 (Pa)$
Densidad ( $\rho_0$ )	$\rho_{ow}=999,972 (Kg/m^3)$	$\rho_{0A}=1,225 (Kg/m^3)$
Celeridad ( $c(\rho_0)$ )	$c_w=1.483,260 (m/s)$	$c_A=340,468 (m/s)$

Tabla 1. Valores de referencia usados en los ejemplos numéricos.

Tomando  $(p_0, \rho_0)$  como condiciones particulares de la solución general de (2), se obtiene:

$$\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{p-p_0}{K}\right) \text{ o } p = p_0 + K \cdot \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) \quad (3)$$

## 2.2.- Ecuaciones de flujo poco compresible

La versión no viscosa y unidimensional en la dirección de la gravedad de las ecuaciones de Navier-Stokes puede ser escrita como ley conservativa de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z = \mathbf{I}(\mathbf{U}) \quad (4)$$

donde  $t$  es el tiempo,  $z$  el espacio,  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  e  $\mathbf{I}(\mathbf{U})$  son, respectivamente, el vector de variables conservativas, el vector de flujos y el término fuente; que se definen como:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho \cdot \Psi \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + p \\ \rho w \cdot \Psi \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

donde  $g$  es la gravedad que vale  $9,81m/s^2$  para la dirección vertical o  $g=0$  de otro modo,  $\rho$  es la densidad,  $p$  es la presión,  $w$  es la velocidad en el eje  $z$  y  $\psi$  es un escalar pasivo que representa, por ejemplo, cualquiera de las velocidades tangenciales en los otros ejes coordenados. Si se asume que los fluidos se comprimen sin intercambio de calor ni de materia, esto es mediante un proceso isotérmico y adiabático, la ecuación de la energía puede ser eliminada porque queda desacoplada. Las velocidades tangenciales en la dirección de los ejes  $x$  e  $y$  y la concentración de un contaminante aumentan el número de ecuaciones y añaden escalares pasivos. Una cantidad  $\psi(z,t)$  es transportada pasivamente por advección con el fluido. Por lo tanto,  $\psi$  es una representación general de estas variables. El número total de ecuaciones y escalares pasivos depende de la dimensión del problema (1D, 2D o 3D). Si se incorpora la ecuación de clausura (3) en el sistema (4-5), tenemos:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho \cdot \Psi \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + K \cdot \ln(\rho) - K \cdot \ln(\rho_0) \\ \rho w \cdot \Psi \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{I}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para considerar la superficie libre como una frontera entre dos medios con parámetros de referencia diferentes ( $\rho_{0w}, \rho_{0A}$ ), es necesario mantener en el vector de flujos el tercer sumando de la segunda componente, es decir, se tiene que considerar la variación espacial de  $\rho_0$ . El resto de parámetros de referencia permanecen constantes en todos los lugares.

### 2.3.- Invariantes de Riemann y estructura de vectores propios

Los invariantes de Riemann son el resultado de transformaciones matemáticas hechas sobre el sistema de ecuaciones en derivadas parciales de primer orden de tipo cuasi-lineal, que permiten resolverlo de manera más sencilla. Aquí, los invariantes de Riemann son la parte de la solución al problema de Riemann cuando ésta es continua y diferenciable. Definiendo:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \rho \Psi \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{H}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{u_2^2}{u_1} + K \cdot \ln(u_1) - K \cdot \ln(\rho_0) \\ \frac{u_2 u_3}{u_1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

se puede escribir la matriz jacobiana de  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  se la siguiente manera:

$$\mathbf{A}(U) = \left[ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial U} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{K}{u_1} - \frac{u_2^2}{u_1^2} & \frac{2u_2}{u_1} & 0 \\ -\frac{u_2 u_3}{u_1^2} & \frac{u_3}{u_1} & \frac{u_2}{u_1} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2(\rho) - w^2 & 2w & 0 \\ -w\Psi & \Psi & w \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si se busca la solución del polinomio característico como sigue

$$[\mathbf{A}(U)]\mathbf{K} = \lambda \mathbf{K} \quad \rightarrow \quad [\mathbf{A}(U) - \lambda \mathbf{I}] = \mathbf{0} \quad (9)$$

siendo  $\Delta$  el determinante, se obtienen los siguientes valores propios y vectores propios por la derecha de  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = w - c(\rho) \quad ; \quad \lambda_2 = w \quad ; \quad \lambda_3 = w + c(\rho) \quad (10)$$

$$\mathbf{K}^{(1)} = (1, u - c(\rho), \Psi)^T \quad ; \quad \mathbf{K}^{(2)} = (0, 0, 1)^T \quad ; \quad \mathbf{K}^{(3)} = (1, w + c(\rho), \Psi)^T$$

Todos estos vectores son linealmente independientes y se pueden compilar en una matriz  $\mathbf{K}$ ; la matriz  $\mathbf{K}$  y su inversa  $\mathbf{K}^{-1}$  son:

$$\mathbf{K} = [\mathbf{K}^{(1)} \mathbf{K}^{(2)} \mathbf{K}^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ w - c & 0 & w + c \\ \Psi & 1 & \Psi \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{K}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{w+c}{2c} & -\frac{1}{2c} & 0 \\ -\Psi & 0 & 1 \\ -\frac{w-c}{2c} & \frac{1}{2c} & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

En condiciones subsónicas, cuando se tienen números de Mach bajos,  $c=c(\rho)$  es siempre mayor que  $w$  de manera que los valores propios siempre son reales y diferentes y los vectores propios linealmente independientes. En tales circunstancias, el sistema (4)-(6) se denomina estrictamente hiperbólico en un punto cualquiera  $(z,t)$ . Transformaciones matemáticas sobre (4) permiten obtener la forma característica; estos pasos pueden representarse a modo de resumen de la siguiente manera:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{H}(U)_z = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{U}_t + \mathbf{A}(U)\mathbf{U}_z = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}_t + [\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}(U)\mathbf{K}]\mathbf{K}^{-1}\mathbf{U}_z = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{U}_t + \Lambda \mathbf{U}_z) = \mathbf{0} \quad (12)$$

$$[\mathbf{K}^{-1}] \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{0} \quad \text{a lo largo de las curvas características que cumplen: } \frac{dZ}{dt} = \lambda$$

Los invariantes de Riemann son constantes a lo largo de las curvas características del sistema de EDO. La aplicación de (12) al sistema de leyes de conservación da la denominada forma característica:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}[w+2c(\rho)] &= 0 & \text{along} & \frac{dz_1}{dt} = w - c(\rho) \\ \frac{d\Psi}{dt} &= 0 & \text{along} & \frac{dz_2}{dt} = w \\ \frac{d}{dt}[w-2c(\rho)] &= 0 & \text{along} & \frac{dz_3}{dt} = w + c(\rho) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

donde el sistema original de tres ecuaciones en derivadas parciales (4)-(6) queda substituido por este otro de 6 EDO. El método de las características clásico es un método numérico para resolver este sistema; desafortunadamente el funcionamiento de este método en presencia de discontinuidades no es bueno.

Un campo  $\lambda_i$ -característico se dice que es linealmente degenerado si  $\nabla\lambda_{(i)} \cdot \mathbf{K}^{(i)} = 0$ ;  $i=1,2,3$  y genuinamente no lineal si  $\nabla\lambda_i \cdot \mathbf{K}^{(i)} \neq 0$ . El símbolo “.” denota el producto escalar de dos vectores en el espacio de fase  $(u_1, u_2, u_3)$ . Así, los campos característicos asociados a los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_3$  son genuinamente no lineales, y el campo  $\lambda_2$  es linealmente degenerado:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{u_2}{u_1} - \sqrt{K} \cdot u_1^{-0.5} \\ \lambda_2 &= \frac{u_2}{u_1} \\ \lambda_3 &= \frac{u_2}{u_1} + \sqrt{K} \cdot u_1^{-0.5} \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \nabla\lambda_1 &= \left[ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{K}{u_1}} u_1^{-1} - \frac{u_2}{u_1^2}, \frac{1}{u_1}, 0 \right] \equiv \left[ \frac{c-2w}{2\rho}, \frac{1}{\rho}, 0 \right] \\ \nabla\lambda_2 &= \left[ -\frac{u_2}{u_1^2}, \frac{1}{u_1}, 0 \right] \equiv \left[ -\frac{w}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 0 \right] \\ \nabla\lambda_3 &= \left[ -\frac{u_2}{u_1^2}, \frac{1}{u_1}, 0 \right] \equiv \left[ -\left(\frac{c+2w}{2\rho}\right), \frac{1}{\rho}, 0 \right] \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} \nabla\lambda_1 \cdot \mathbf{K}^{(1)} &= -\frac{c}{2\rho} \\ \nabla\lambda_2 \cdot \mathbf{K}^{(2)} &= 0 \\ \nabla\lambda_3 \cdot \mathbf{K}^{(3)} &= \frac{c}{2\rho} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

## 2.4.- Solución del problema de Riemann

En este apartado vamos a resolver exactamente el siguiente problema de valor inicial de Riemann:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_t + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z &= \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(z,0) &= \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{si } z < 0 \\ \mathbf{U}_R & \text{si } z > 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Para las ecuaciones (4) y (6), la solución presenta la estructura que se muestra en la Figura 2. Existen tres familias de ondas que separan cuatro estados; de izquierda a derecha estos estados son  $\mathbf{U}_L$  (valor inicial que es dato conocido),  $\mathbf{U}_L^*$ ,  $\mathbf{U}_R^*$  y  $\mathbf{U}_R$  (también dato conocido). Los estados  $\mathbf{U}_L^*$  y  $\mathbf{U}_R^*$  emergen de la interacción de los estados  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_R$  y comprenden la denominada *Región estrella* (en la Figura 2 denotada en inglés con *Star Region*). Las ondas



izquierda y derecha pueden ser ondas tanto de choque como de rarefacción; todas las variables del flujo cambian a través de estas dos ondas pero el cambio producido a través de las de choque es discontinuo. La onda de en medio es una onda de corte —también denominada discontinuidad de contacto— a través de la cual (Path 2)  $w^*$  es constante y  $(\rho, \Psi)$  presentan una discontinuidad de salto, desde el estado  $(\rho_L^*, \Psi_L^*)$  al  $(\rho_R^*, \Psi_R^*)$ .

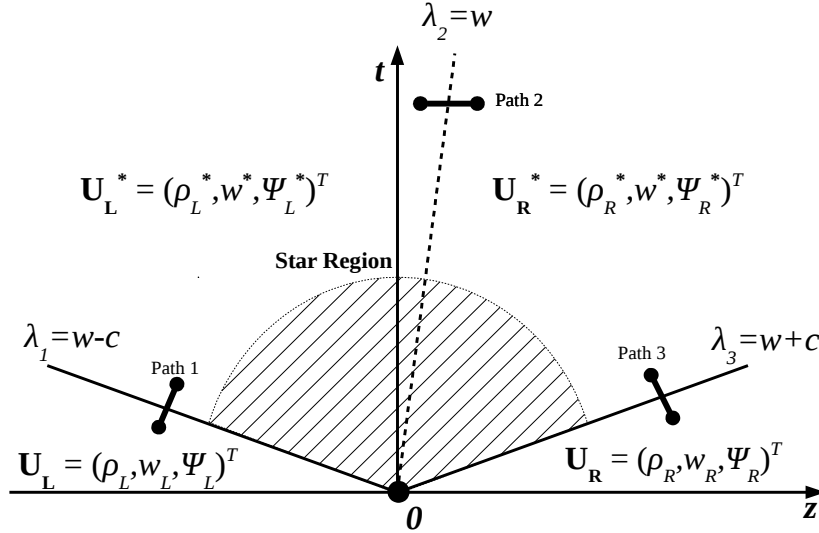


Figura 2: Estructura de la solución del problema de Riemann.

La estrategia de la solución se basa en el hecho que  $w^*$  es constante en toda la *Región estrella*; como se demostrará en la siguiente sección.

### 2.4.1. - La superficie libre como discontinuidad de contacto

En el flujo en lámina libre en canales, la superficie libre es una frontera que separa el agua del aire. En esta comunicación la superficie libre es considerada como una discontinuidad de densidad y puede ser vista como una onda de contacto. Para una onda de contacto, los dos estados conocidos  $U_L^*$  y  $U_R^*$  se conectan a través de una simple discontinuidad de salto que viaja a velocidad  $S_2$  en el campo  $\lambda_2$ -característico linealmente degenerado y deben verificar las siguientes condiciones [10]:

1. Condiciones de *Rankine-Hugoniot* a través del paso “Path 2” de la Figura 2:

$$S_2 = \frac{\Delta H(U)}{\Delta U} = \frac{H(U_L^*) - H(U_R^*)}{U_L^* - U_R^*} \quad (16)$$

2. Constancia en los *Invariantes generalizados Riemann* dados por las siguientes EDO:

$$\frac{d\Psi}{dt} = 0 \quad \text{a lo largo de} \quad \frac{dz_2}{dt} = w \quad (17)$$

3. Condición de curvas características paralelas:

$$\lambda_2(U_L^*) = \lambda_2(U_R^*) \quad (18)$$

Desarrollando (16), obtenemos las siguientes relaciones algebraicas:

$$S_2 = \frac{\rho_R^* \cdot w_R^* - \rho_L^* \cdot w_L^*}{\rho_R^* - \rho_L^*}$$

$$S_2 = \frac{\rho_R^* \cdot (w_R^*)^2 - \rho_L^* \cdot (w_L^*)^2 + K_R \cdot \ln(\rho_R^*) - K_R \cdot \ln(\rho_{0R}) - K_L \cdot \ln(\rho_{*L}) + K_L \cdot \ln(\rho_{0L})}{\rho_R^* \cdot w_R^* - \rho_L^* \cdot w_L^*} \quad (19)$$

$$S_2 = \frac{\rho_R^* \cdot w_R^* \cdot \Psi_R^* - \rho_L^* \cdot w_L^* \cdot \Psi_L^*}{\rho_R^* \cdot \Psi_R^* - \rho_L^* \cdot \Psi_L^*}$$

Dado que a ambos lados de la superficie libre considerada como discontinuidad de contacto tiene que haber la misma presión (la presión que ejerce el aire sobre la superficie de agua debe de ser igual a la presión que ejerce el agua sobre la superficie de aire), deberá cumplirse la siguiente relación:

$$K_R \cdot \ln(\rho_R^*) - K_R \cdot \ln(\rho_{0R}) = K_L \cdot \ln(\rho_L^*) - K_L \cdot \ln(\rho_{0L}) \quad (20)$$

Teniendo en cuenta (20), si se iguala la primera ecuación de (19) a la segunda y se opera para eliminar  $S_2$ , la segunda condición de Rankine-Hugoniot puede ser substituida por la siguiente:

$$w_R^* = w_L^* = w^* \rightarrow S_2 = w^* \quad (21)$$

Desde el punto de vista físico, es fácil aceptar esta condición sobre la superficie libre si se acepta la hipótesis de no deslizamiento, de acuerdo con la cual, la velocidad relativa entre ambos fluidos en la frontera es cero. Introduciendo (21) en la tercera condición de (19), se puede concluir que cualquier combinación de valores de  $\Psi_R^*$  y  $\Psi_L^*$  satisface esta condición. Respecto a los invariantes generalizados de Riemann, si se resuelven las EDO a ambos lados de la superficie libre, se obtiene:

$$\Psi_L^* = \Psi_L \quad ; \quad \Psi_R^* = \Psi_R \quad (22)$$

Finalmente, (21) hace trivial la condición de características paralelas.

#### 2.4.2. - Discontinuidades de choque

A través del camino “Path 1” de la Figura 2 (entre los estados  $U_L$  y  $U_L^*$ ) y/o el camino “Path 3” (entre  $U_R$  y  $U_R^*$ ), podemos encontrar ondas de choque. Para una onda de choque, los dos estados constantes están conectados por una simple discontinuidad de salto en un campo  $\lambda_i$ -característico genuinamente no lineal y se deben verificar la siguientes condiciones [10]:

1. Las condiciones de Rankine-Hugoniot a través de los caminos “Path 1” y/o “Path 3”:

$$S_1 = \frac{H(U_L^*) - H(U_L)}{U_L^* - U_L} \quad ; \quad S_3 = \frac{H(U_R^*) - H(U_R)}{U_R^* - U_R} \quad (23)$$

2. La condición de entropía:

$$\lambda_1(U_L) \geq S_1 \geq \lambda_1(U_L^*) \quad ; \quad \lambda_3(U_R^*) \geq S_3 \geq \lambda_3(U_R) \quad (24)$$

Desarrollando (23), se obtienen la siguientes relaciones algebraicas:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \frac{\rho_L^* w^* - \rho_L w_L}{\rho_L^* - \rho_L} & S_3 &= \frac{\rho_R^* w^* - \rho_R w_R}{\rho_R^* - \rho_R} \\
 S_1 &= \frac{\rho_L^* (w^*)^2 - \rho_L w_L^2 + K_L \cdot [\ln(\rho_L^*) - \ln(\rho_L)]}{\rho_L w^* - \rho_L w_L} & S_3 &= \frac{\rho_R^* (w^*)^2 - \rho_R w_R^2 + K_R \cdot [\ln(\rho_R^*) - \ln(\rho_R)]}{\rho_R w^* - \rho_R w_R} \\
 S_1 &= \frac{\rho_L^* w^* \Psi_L^* - \rho_L w_L \Psi_L}{\rho_L^* \Psi_L^* - \rho_L \Psi_L} & S_3 &= \frac{\rho_R^* w^* \Psi_R^* - \rho_R w_R \Psi_R}{\rho_R^* \Psi_R^* - \rho_R \Psi_R}
 \end{aligned} \tag{25}$$

Si se procede de la misma manera que al encontrar (21) considerando la condición de entropía, podemos escribir:

$$\frac{(w^* - w_L)^2}{K_L} = \ln\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_L}\right) \cdot \left(\frac{\rho_L^* - \rho_L}{\rho_L^* \rho_L}\right) \quad ; \quad \frac{(w^* - w_R)^2}{K_R} = \ln\left(\frac{\rho_R^*}{\rho_R}\right) \cdot \left(\frac{\rho_R^* - \rho_R}{\rho_R^* \rho_R}\right) \tag{26}$$

Cuando  $w^*$ ,  $S_1$  y/o  $S_3$  son conocidas, el escalar pasivo puede ser actualizado a partir de (25):

$$\Psi_L^* = \left(\frac{S_1 - w_L}{S_1 - w^*}\right) \left(\frac{\rho_L}{\rho_L^*}\right) \cdot \Psi_L \quad ; \quad \Psi_R^* = \left(\frac{S_3 - w_R}{S_3 - w^*}\right) \left(\frac{\rho_R}{\rho_R^*}\right) \cdot \Psi_R \tag{27}$$

### 2.4.3. - Ondas de rarefacción

A través del camino “Path 1” (entre los estados  $\mathbf{U}_L$  y  $\mathbf{U}_L^*$ ) y/o del “Path 3” (entre  $\mathbf{U}_R$  y  $\mathbf{U}_R^*$ ), pueden existir ondas de rarefacción. Para una onda de rarefacción los dos estados constantes están conectados a través de una transición continua y suave en un campo  $\lambda_i$ -característico no lineal. En tal caso, tienen que cumplirse las siguientes condiciones [10]:

1. Constancia de los invariantes generalizados de *Riemann* a través de “Path 1” y/o “Path 3” resolviendo las siguientes EDO:

$$\left. \begin{aligned}
 w + 2c(\rho) &= \text{const1} & \text{along Path 3} \\
 w - 2c(\rho) &= \text{const3} & \text{along Path 1}
 \end{aligned} \right\} \tag{28}$$

2. Condición de curvas características divergentes:

$$\lambda_1(\mathbf{U}_L) \leq S_1 \leq \lambda_1(\mathbf{U}_L^*) \quad ; \quad \lambda_3(\mathbf{U}_R^*) \leq S_3 \leq \lambda_3(\mathbf{U}_R) \tag{29}$$

Aplicando (28) a los largo de los caminos, se obtiene:

$$w^* + 2c(\rho_L^*) = w_L + 2c(\rho_L) \quad ; \quad w^* - 2c(\rho_R^*) = w_R - 2c(\rho_R) \tag{30}$$

### 2.4.5. - Solución numérica

De acuerdo con las tres secciones anteriores, la solución exacta del problema de Riemann (15) puede ser encontrada si se resuelve el sistema 3x3 no lineal siguiente:

$$\left. \begin{aligned}
 h_1(w^*, \rho_L^*, \rho_R^*) &\equiv \frac{\ln(\rho_R^*) - \ln(\rho_{0R})}{K_L} - \frac{\ln(\rho_L^*) + \ln(\rho_{0L})}{K_R} = 0 \\
 h_2(w^*, \rho_L^*, \rho_R^*) &\equiv \begin{cases} \frac{(w^* - w_L)^2}{K_L} - \ln\left(\frac{\rho_L^*}{\rho_L}\right) \cdot \left(\frac{\rho_L^* - \rho_L}{\rho_L^* \rho_L}\right) = 0 & \text{si } \rho_L^* > \rho_L \\ \frac{(w^* - w_L)^2}{K_L} - 4\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_L^*}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_L}}\right)^2 = 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\
 h_3(w^*, \rho_L^*, \rho_R^*) &\equiv \begin{cases} \frac{(w^* - w_R)^2}{K_R} - \ln\left(\frac{\rho_R^*}{\rho_R}\right) \cdot \left(\frac{\rho_R^* - \rho_R}{\rho_R^* \rho_R}\right) = 0 & \text{si } \rho_R^* > \rho_R \\ \frac{(w^* - w_R)^2}{K_R} + 4\left(\frac{1}{\sqrt{\rho_R^*}} - \frac{1}{\sqrt{\rho_R}}\right)^2 = 0 & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

para encontrar las incógnitas  $w^*$ ,  $\rho_L^*$  and  $\rho_R^*$ ; entonces, mediante las expresiones:

$$\begin{aligned}
 \Psi_L^* &= \begin{cases} \left(\frac{S_1 - w_L}{S_1 - w^*}\right) \left(\frac{\rho_L}{\rho_L^*}\right) \cdot \Psi_L & \text{si } \rho_L^* > \rho_L \\ \Psi_L & \text{en otro caso} \end{cases} \\
 \Psi_R^* &= \begin{cases} \left(\frac{S_3 - w_R}{S_3 - w^*}\right) \left(\frac{\rho_R}{\rho_R^*}\right) \cdot \Psi_R & \text{si } \rho_R^* > \rho_R \\ \Psi_R & \text{en otro caso} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (32)$$

se obtiene las actualizaciones del escalar pasivo  $\Psi_L^*$  y  $\Psi_R^*$ . Frente esta proposición para la solución numérica, cabe destacar los siguiente:

- La solución se obtiene para cualquier punto del eje ( $z=0$ ,  $t>0$  de la Figura 2) donde se definirá el flujo de Godunov en la siguiente sección.
- El método de Newton-Raphson para la obtención de los ceros de un conjunto de función es, en este caso, una herramienta muy potente para resolver el sistema (31). A pesar de tratarse de un sistema iterativo en donde en cada iteración se puede producir un cambio de tipo de onda de choque o rarefacción según indican los condicionales  $\rho_L^* > \rho_L$  y  $\rho_R^* > \rho_R$ , la experiencia nos dice que el método es muy eficaz.
- Si en ambos lados de la discontinuidad de contacto hay el mismo medio, (31) podría simplificarse puesto que  $K_L=K_R$ ,  $\rho_{0L}=\rho_{0R}$  y  $\rho_L^*=\rho_R^*$ . Entonces el sistema se reduce a un sistema de dimensión 2x2.
- $h_1$ ,  $h_2$  y  $h_3$  son funciones continuas de clase  $C^2$  como mínimo en todo el dominio; especialmente en el límite cuando  $\rho_L^*$  tiende  $\rho_L$  y cuando  $\rho_R^*$  tiende a  $\rho_R$ . Estas

características hacen que el método de Newton-Raphson sea altamente eficiente.

Será útil en la siguiente sección denotar esta solución numérica mediante la función *RPS*:

$$\mathbf{U}^* = (\Psi_L^*, \rho_L^*, w^*, \rho_R^*, \Psi_R^*)^T = RPS[\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R] = RPS[(\rho_0, K, \rho, w, \Psi)_L, (\rho_0, K, \rho, w, \Psi)_R] \quad (33)$$

donde *RPS* significa solución del problema de Riemann.

### 3.- ESQUEMA EN VOLÚMENES FINITOS

Consideremos el sistema no lineal constituido por las ecuaciones (4) y (6), dividamos el dominio espacial  $[0, L]$  en  $M$  celdas, denominadas *Volúmenes finitos*, de longitud  $\Delta z = L/M$  según el esquema de la izquierda de la Figura 3 y denotemos cada volumen mediante  $I_k$ ,  $k=1, \dots, M$ . Cada volumen se define como:

$$I_k = [z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}] \quad (34)$$

$$z_{k-\frac{1}{2}} = (k-\frac{1}{2})\Delta z \quad ; \quad z_{k+\frac{1}{2}} = (k+\frac{1}{2})\Delta z$$

Sea  $\Delta t$  el incremento del tiempo y definamos una aproximación a la solución  $\mathbf{U}_k^n$  del volumen finito  $I_k$  en el instante  $t^n = n \cdot \Delta t$  mediante el siguiente valor medio:

$$\mathbf{U}_k^n = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(z, t^n) dz \quad (35)$$

Esta discretización define la solución como una función a tramos y genera dominios de integración  $D_k^n = \{[z_{k-\frac{1}{2}}, z_{k+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}]\}$  en el plano  $z-t$  como muestra el esquema de la derecha de la Figura 3.

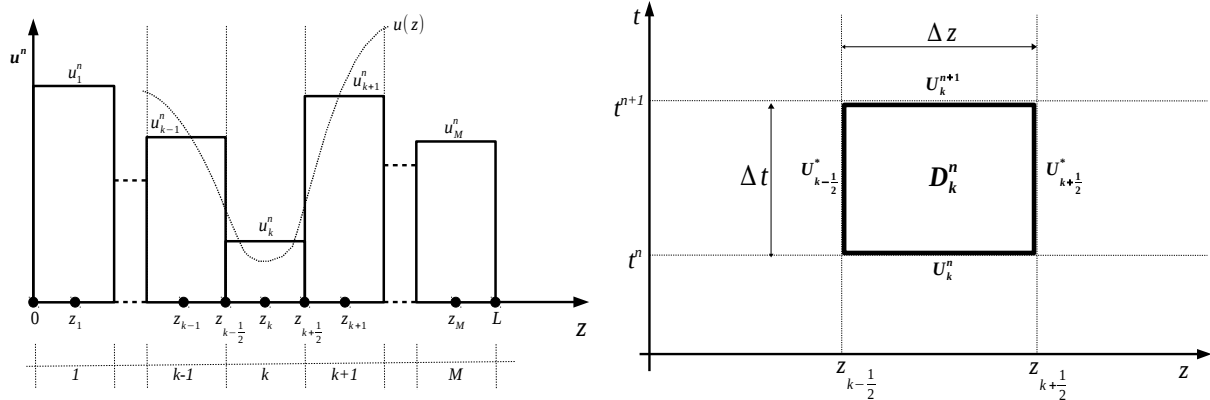


Figura 3: A la izquierda, función a tramos como aproximación a la solución. A la derecha, representación del dominio de integración del  $k$ -ésimo volumen en el plano  $z-t$ .

A la vista de la Figura 3, hay que darse cuenta que el volumen de control está unívocamente contorneado por estados constantes de manera que es fácil integrar (4) en  $D_k^n$  y escribir:

$$\iint_{D_k^n} [U_t + \mathbf{H}(U)_z] dz \cdot dt = \iint_{D_k^n} \mathbf{I}(U) dz \cdot dt \quad (36)$$

Aplicando el teorema de Green a la parte izquierda de (36) obtenemos:

$$\iint_{D_k^n} \left[ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \left( -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} \right) \right] dz \cdot dt = \oint_C [\mathbf{U} dz - \mathbf{H} dt] \quad (37)$$

donde el sentido de integración a lo largo de  $C$  es el contrario al de las manecillas del reloj. Desarrollando la parte derecha de (37),

$$\int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(z, t^n) dz - \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{H}[\mathbf{U}(z_{k+\frac{1}{2}}, t)] dt + \int_{z_{k+\frac{1}{2}}}^{z_{k-\frac{1}{2}}} \mathbf{U}(z, t^{n+1}) dz - \int_{t^{n+1}}^{t^n} \mathbf{H}[\mathbf{U}(z_{k-\frac{1}{2}}, t)] dt \quad (38)$$

y teniendo en cuenta (35), se puede escribir:

$$\oint_C [\mathbf{U} dz - \mathbf{H} dt] = U_k^n \Delta z - \mathbf{H}_{k+\frac{1}{2}}^n \Delta t - U_k^{n+1} \Delta z + \mathbf{H}_{k-\frac{1}{2}}^n \Delta t \quad (39)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{k-\frac{1}{2}}^n &= \mathbf{H}[U_{k-\frac{1}{2}}^n] = \mathbf{H}\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} U(z_{k-\frac{1}{2}}, t) dt\right] = \mathbf{H}[RPS[U_{k-1}^n, U_k^n]] \\ \mathbf{H}_{k+\frac{1}{2}}^n &= \mathbf{H}[U_{k+\frac{1}{2}}^n] = \mathbf{H}\left[\frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} U(z_{k+\frac{1}{2}}, t) dt\right] = \mathbf{H}[RPS[U_k^n, U_{k+1}^n]] \end{aligned} \quad (40)$$

Finalmente, un esquema en volúmenes finitos puede ser escrito:

$$U_k^{n+1} = U_k^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} [\mathbf{H}_{k-\frac{1}{2}}^n - \mathbf{H}_{k+\frac{1}{2}}^n] - \Delta t I(U_k^n) \quad (41)$$

El esquema (41) necesita satisfacer la condición de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL):

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z}{S_{max}^n} \quad (42)$$

Dado que la aproximación constante a tramos es un promedio de la solución en la celda de dimensión  $\Delta z$ , el error espacial es del orden  $\Delta z$  y el esquema es de primer orden en el espacio. Si se aplica el esquema (41) al sistema (4)-(6), se obtienen las siguientes tres expresiones algebraicas de actualización temporal de las variables hidráulicas:

$$\left. \begin{aligned} \rho_k^{n+1} &= \rho_{k-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} [(\rho w)^*_{k-\frac{1}{2}} - (\rho w)^*_{k+\frac{1}{2}}] \\ \rho_k^{n+1} w_k^{n+1} &= \rho_k^n w_k^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ \left( \rho w^2 + K \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)^*_{k-\frac{1}{2}} - \left( \rho w^2 + K \ln \frac{\rho}{\rho_0} \right)^*_{k+\frac{1}{2}} \right] \\ \rho_k^{n+1} \Psi_k^{n+1} &= \rho_k^n \Psi_k^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} [(\rho w \Psi)^*_{k-\frac{1}{2}} - (\rho w \Psi)^*_{k+\frac{1}{2}}] \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

para  $k=1, \dots, M$ . Este esquema numérico también se aplica en volúmenes de control donde está presente la lámina libre, como se muestra en la Figura 4.



$$\begin{aligned}
 \rho_{k-1}^{n+1} &= \frac{1}{1+\theta^{n+1}} \left[ (1+\theta^n) \rho_{k-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} (\rho w)_{k-\frac{3}{2}}^* \right] \\
 \rho_{k-1}^{n+1} w_{k-1}^{n+1} &= \frac{1}{1+\theta^{n+1}} \left[ (1+\theta^n) \rho_{k-1}^n w_{k-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ (\rho w^2 + K \ln \frac{\rho}{\rho_0})_{k-\frac{3}{2}} - K \ln \frac{\rho_L^*}{\rho_0} \right] \right] \\
 \rho_{k-1}^{n+1} \Psi_{k-1}^{n+1} &= \frac{1}{1+\theta^{n+1}} \left[ (1+\theta^n) \rho_{k-1}^n \Psi_{k-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} (\rho w \Psi)_{k-\frac{3}{2}}^* \right] \\
 \rho_{k+1}^{n+1} &= \frac{1}{2-\theta^{n+1}} \left[ (2-\theta^n) \rho_{k+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (\rho w)_{k+\frac{3}{2}}^* \right] \\
 \rho_{k+1}^{n+1} w_{k+1}^{n+1} &= \frac{1}{2-\theta^{n+1}} \left[ (2-\theta^n) \rho_{k+1}^n w_{k+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ (\rho w^2 + K \ln \frac{\rho}{\rho_0})_{k+\frac{3}{2}} - K \ln \frac{\rho_R^*}{\rho_0} \right] \right] \\
 \rho_{k+1}^{n+1} \Psi_{k+1}^{n+1} &= \frac{1}{2-\theta^{n+1}} \left[ (2-\theta^n) \rho_{k+1}^n \Psi_{k+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ (\rho w \Psi)_{k-\frac{3}{2}}^* - (\rho w \Psi)_{k+\frac{3}{2}}^* \right] \right]
 \end{aligned} \tag{45}$$

donde:

$$\theta^{n+1} = \theta^n + \frac{\Delta t}{\Delta z} w^* \text{ y } \mathbf{U}_k^* = (\Psi_L^*, \rho_L^*, w^*, \rho_R^*, \Psi_R^*)^T = RPS(\mathbf{U}_{k-1}^n, \mathbf{U}_{k+1}^n) \tag{46}$$

#### 4.- EJEMPLOS NUMÉRICOS DE VERIFICACIÓN

##### 4.1.- Condiciones iniciales estacionarias

Desde el momento en que la densidad contiene la información de presión, una condición inicial de densidad constante en todo el dominio de integración resulta inestable de por sí porque describe un gradiente de presiones que genera movimiento en una situación hidrostática. Además, tal inestabilidad se mantiene en el tiempo dado que las ecuaciones no incorporan la viscosidad en el término fuente. En este punto, resulta interesante mostrar la solución hidrostática de la densidad para poder establecer unas condiciones iniciales hidrostáticas estables. Derivando (3) respecto  $z$  y substituyendo el resultado en la ecuación fundamental de la hidrostática, se obtiene la siguiente EDO:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z} \left[ p_0 + K \cdot \ln \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \right] = \frac{K}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} \\
 \frac{\partial p}{\partial z} &= -g\rho
 \end{aligned} \right\} \rightarrow \frac{K}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} = -g\rho \rightarrow \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{-g}{K} dz \tag{47}$$



Resolviendo (47), obtenemos la solución general de la ecuación fundamental de la hidrostática:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{g}{K} z + C \quad (48)$$

Tomando los valores de referencia de la densidad  $\rho = \rho_0$  a la altura de la superficie libre  $z = z_0$  como solución particular, se puede escribir la solución estacionaria como sigue:

$$\rho = \left( \frac{K}{g\rho_0 \cdot (z - z_0) + K} \right) \rho_0 \quad (49)$$

Integrando una vez más para obtener el valor promedio en un volumen finito, se obtiene:

$$\bar{\rho}_k = \frac{1}{\Delta z} \int_{z_{k-\frac{1}{2}}}^{z_{k+\frac{1}{2}}} \rho dz = \frac{1}{\Delta z} \left( \frac{K}{g} \right) \ln \left[ \frac{(z_{k+\frac{1}{2}} - z_0) \gamma_0 + K}{(z_{k-\frac{1}{2}} - z_0) \gamma_0 + K} \right] \quad (50)$$

Se ha comprobado numéricamente que tomando  $\bar{w}_k = 0$  y  $\bar{\rho}_k$  según (50) y  $k = 1, \dots, M$  para todas las  $M$  celdas del dominio espacial  $[0, L]$  que los esquemas (43) y (45) mantienen estacionaria la solución en condiciones hidrostáticas a pesar de no disponer de disipación.

#### 4.2.- El golpe de ariete

El golpe de ariete es un aumento de presión que se produce cuando un fluido en movimiento se ve obligado a detener o cambiar de dirección repentinamente (cambio de momento). Un golpe de ariete de agua comúnmente ocurre cuando una válvula se cierra de repente en un extremo de un sistema de tuberías y una onda de presión se propaga. A partir de la ecuación de Joukowsky se puede calcular la sobrepresión máxima generada por el cierre instantáneo de una válvula mediante la expresión de Allievi.

$$\Delta H = \frac{\Delta P}{\gamma} = \frac{c(\rho_0) \Delta V}{g} \quad (51)$$

donde  $\Delta P$  es el la magnitud de la onda de presión generada,  $\rho_0$  es la densidad del fluido y  $c(\rho_0)$  su correspondiente celeridad de la onda calculada como en (2) suponiendo una tubería totalmente inelástica (esto es, una tubería con un módulo de elasticidad infinito) y  $\Delta V$  es el cambio de velocidad del fluido; cantidades evaluadas justo antes del momento del cierre.

El segundo ejemplo de verificación numérica es el cálculo de un golpe de ariete de una tubería horizontal de 25 Km de longitud totalmente llena de agua en la que se produce un cierre instantáneo. La solución numérica debe de aproximarse al pulso de Joukowsky tanto en el valor de la sobrepresión como en la velocidad del viaje. Tomando los valores de la Tabla 1, el tiempo que tarda la onda en llegar al punto medio ( $z = 12.500$  m) es:

$$t = \frac{12.500}{1.483,260 - 1} = 8,433 \text{ s} \quad (52)$$

— *Modelo numérico:*  $g = 0 \text{ m/s}^2$ .

Caso 1:  $L = 25.000 \text{ m}$ ,  $M = 2.500$  volúmenes finitos.  $\Delta z = 10 \text{ m}$ .

Caso 2:  $L = 25.000 \text{ m}$ ,  $M = 25.000$  volúmenes finitos.  $\Delta z = 1 \text{ m}$ .

Caso 3:  $L = 25.000 \text{ m}$ ,  $M = 250.000$  volúmenes finitos.  $\Delta z = 0,1 \text{ m}$ .

— *Condiciones iniciales para los tres casos:*

$$\bar{w}_k^0 = 1 \text{ m/s} ; \bar{\rho}_k^0 = \rho_{0W} ; k = 1, \dots, M$$

— *Condiciones de contorno definidas sobre los pseudonodos para los tres casos:*

$$\bar{w}_0^n = 1 \text{ m/s} ; \bar{\rho}_0^n = \rho_{0W} ; \bar{w}_{M+1}^n = -\bar{w}_M^n ; \bar{\rho}_{M+1}^n = \bar{\rho}_M^n$$

El perfil de presiones en el instante  $t = 8,433 \text{ s}$  de después del cierre instantáneo puede verse en la gráfica de la izquierda de la Figura 5.

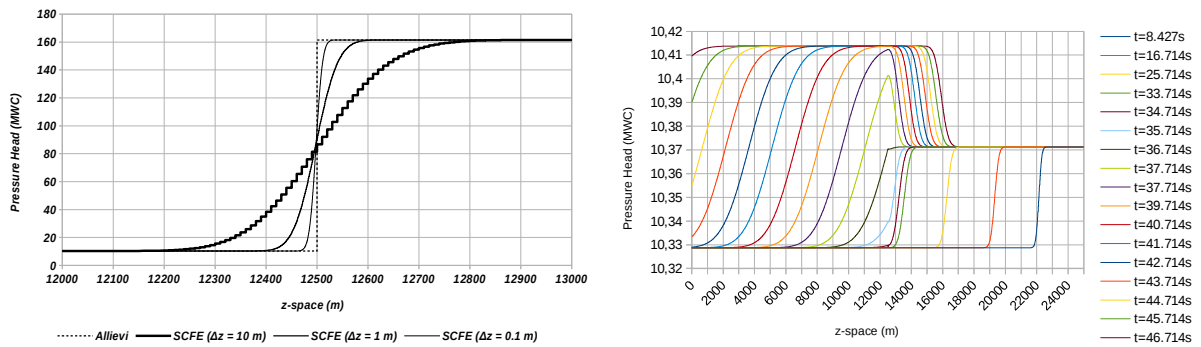


Figura 5: Perfil longitudinal del ejemplo de golpe de ariete con infinita rigidez de la tubería. A la izquierda, perfiles de presiones en el instante  $t = 8,433 \text{ s}$  con la tubería llena solo de agua para los tres casos de discretización. A la derecha, perfiles de presiones en diferentes instantes cuando la tubería inicialmente se encuentra la mitad llena de agua y la otra mitad con aire.

A la vista de la gráfica de la izquierda de la Figura 5 puede verse como el pulso de Joukowski obtenido con las SCFE con los tres niveles de precisión coincide con el obtenido con la expresión de Allievi y el momento de llegada del frente a la coordenada  $12.500 \text{ m}$ . La suavización de la curva viene dada por la difusión numérica, puesto que método de Godunov que se ha propuesto es de primer orden. La presencia de una lámina libre se muestra en un nuevo ensayo numérico con las siguientes características:

— *Modelo numérico:*  $L = 25.000 \text{ m}$ ,  $M = 2.500$  volúmenes finitos.  $\Delta z = 10 \text{ m}$ ,  $g = 0 \text{ m/s}^2$ .

— *Condiciones iniciales:*

$$\bar{w}_k^0 = 1 \text{ m/s} , \bar{\rho}_k^0 = \rho_{0W} , k = 1, \dots, 1.250 ; \bar{w}_k^0 = 1 \text{ m/s} , \bar{\rho}_k^0 = \rho_{0A} , k = 1.251, \dots, M$$

— *Condiciones de contorno sobre los pseudo-volúmenes:*

$$\bar{w}_0^n = 1 \text{ m/s} ; \bar{\rho}_0^n = \rho_{0W} ; \bar{w}_{M+1}^n = -\bar{w}_M^n ; \bar{\rho}_{M+1}^n = \bar{\rho}_M^n$$

Una secuencia de perfiles de presiones para diferentes instantes puede verse en la gráfica de la derecha de la Figura 5. En esta gráfica destaca lo siguiente: 1.- El golpe de ariete inicial converge al de Allievi pero para el aire ( $0,0425 \text{ m.c.a.}$ ). 2.- El golpe producido por la fase agua queda amortiguado debido a la compresión del aire, tal como se esperaría que ocurriera

en presencia de un calderín antiarriete. 3.- Existe un retraso de la llegada a la coordenada 12.500 m ( $t=35,714$  s) a causa de que la celeridad es de 340,46 m/s.

#### 4.3.- El “Do de pecho”

Este ejemplo numérico proviene de la acústica, que es la parte de la mecánica de fluidos compresibles que estudia las ondas del sonido. En el sonido las variaciones de presión y velocidad son pequeñas comparadas con los valores de referencia y la variación de presión es isentrópica. La ecuación fundamental de la acústica deducida por Feymann en una dimensión es la siguiente ecuación de onda para flujo no viscoso:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (53)$$

donde  $p'$  es la presión acústica o variación local de la presión respecto de la de referencia:  $p'=p-p_0$  y  $c$  la celeridad de la onda o velocidad del sonido considerada constante. Esta ecuación tiene como solución general:

$$p'(z,t) = F(ct-z) + G(ct+z) \quad (54)$$

donde  $F$  y  $G$  son doblemente diferenciables y son dos ondas superpuestas,  $F$  viajando hacia aguas abajo y  $G$  hacia aguas arriba, ambas a velocidad  $c$ . El ejemplo que se propone es el caso particular de una onda sinusoidal viajando aguas abajo:

$$p'(z,t) = A \cdot \sin(2\pi f t - k z) \quad (55)$$

donde  $A$  es la amplitud o “volumen” de la onda,  $f$  es la frecuencia de la onda en ciclos por segundo y  $k$  es el número de onda, que es la frecuencia espacial de una onda en radianes por unidad de longitud y que vale:

$$k = 2\pi/\lambda \quad (56)$$

siendo  $\lambda=1/f$  la longitud de onda. Partiendo de una situación sin viento, se inicia para  $z=0$  una variación sinusoidal de la densidad de aire alrededor de  $\rho_0$ , es decir, empieza a cantar un tenor con un “Do de pecho” con una amplitud  $A=500$ . Tal nota tiene una frecuencia  $f=523,251$  Hz. Al cabo de 100 ciclos completos, es decir, en el instante  $t_f=0,191113$ s, el frente de onda ya se encontrará a más de 65 m de punto de emisión y todo el aire comprendido desde el foco hasta ese punto tendrá esta presión acústica:

$$p'(z) = A \cdot \sin(-k z) \quad (57)$$

— Modelo numérico:  $L=2$  m,  $M=2000$  volúmenes finitos,  $\Delta z=0,001$  m,  $g=0$  m/s<sup>2</sup>.

— Condiciones iniciales:

$$\bar{w}_k^0 = 0 \text{ m/s} \quad ; \quad \bar{\rho}_k^0 = \rho_{0A} \quad ; \quad k=1, \dots, M$$

— Condiciones de contorno de aguas arriba definidas en términos de flujo:

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}_1^n) = \left[ \begin{array}{c} \bar{p}_1^n \bar{w}_1^n \\ \bar{p}_1^n (\bar{w}_1^n)^2 + K_A \cdot \ln(\bar{p}_1^n) - K_A \cdot \ln(\rho_{0A}) \end{array} \right] ; \quad \bar{p}_1^n = \rho_{0A} \cdot e^{\left(\frac{p^n - p_0}{K_A}\right)} ; \quad p^n = p_0 + A \cdot \text{sen}(2\pi f \cdot t^n)$$

— Condiciones de contorno de aguas abajo definidas sobre los pseudo-volúmenes:

$$\bar{w}_{M+1}^n = \bar{w}_M^n ; \quad \bar{p}_{M+1}^n = \bar{p}_M^n$$

Los perfiles de presiones en el instante  $t_F$  con las SCFE y (56) pueden verse en la Figura 6.

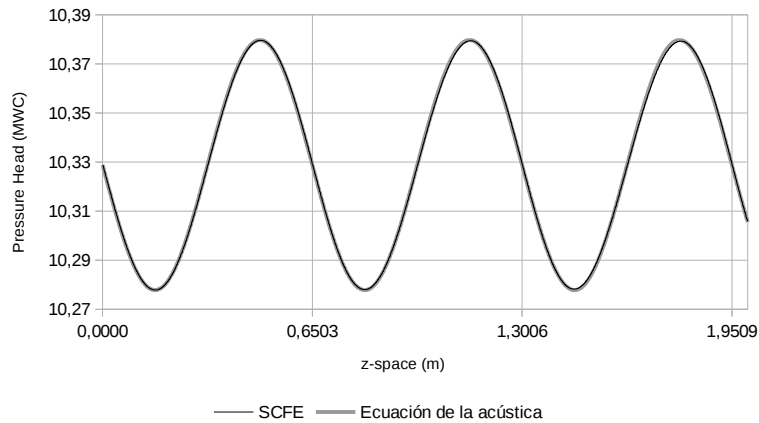


Figura 6: Perfiles de presiones en el instante  $t_F=0,191113s$  de un “Do de pecho” generada por un tenor.

El encaje perfecto entre perfiles de la Figura 6 verifica numéricamente las SCFE.

## 5.- RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se han presentado las *SCFE*, para fluidos como el agua o el aire en condiciones de baja presión y bajos números de Mach donde el proceso de compresión puede considerarse adiabático e isotérmico, y se ha propuesto una solución de Riemann para la obtención de los flujos numéricos de Godunov a través de las caras de un volumen finito, incluido el flujo a través de la interfase entre fluidos o lámina libre. Se han mostrado tres ejemplos numéricos de aplicación de las ecuaciones para la verificación numérica de las *SCFE*. Como conclusión final, se puede decir que las *SCFE* pueden ser utilizadas como alternativa a las ecuaciones de flujo incompresible.

Las *SCFE*, sirven para la modelización de fluidos en las siguientes condiciones: 1.- Bajos números de Mach con bajas velocidades y condiciones subsónicas, 2.- Condiciones ambientales de presión y temperatura, 3.- Flujo entre fluidos no deslizante en la superficie libre y 4.- El proceso de compresión de los fluidos puede considerarse adiabático.

## Referencias

- [1] M.G. Boss, *Discharge Measurement Structures*, International Institute for Land Reclamation and Improvement, Publication 20, Wageningen, The Netherlands, (1989).

- [2] A.J. Clemmens, T.S. Strelkoff y J.A. Replogle, “Calibration of submerged radial gates”, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, 129(9), pp. 680-687, (2003).
- [3] T.L. Wahl, “Refined energy correction for calibration of submerged radial gates”, *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(6), pp. 457-466, (2005).
- [4] O. Castro-Orgaz, D. Lozano y L. Mateos, “Energy and momentum velocity coefficients for calibrating submerged sluice gates in irrigation canals”, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, ASCE, 136(9), pp. 610-616, (2010).
- [5] D. Lozano, L. Mateos, G.P. Merkley, y A.J. Clemmens, “Field calibration of submerged sluice gates in an irrigation canal”, *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*, 136(6), pp. 763-772, (2009).
- [6] A.J. Clemmens, “Avoiding Submergence Transition Zone for Radial Gates in Parallel”, *Critical Transitions in Water and Environmental Resources Management*, doi: 10.1061/40737(2004)276, pp. 1-10, (2004).
- [7] F.M. Henderson, *Open-Channel Flow*, Macmillan Publishing Co., New York, USA, (1966).
- [8] J. Soler-Guitart, E. Bladé, J. Bofill-Abelló y P. Gamazo, “«Enfoque ráster» del problema hidrodinámico del flujo en lámina libre en 2D”, *Tecnología y ciencias del agua*, Vol. IV, núm. 4, pp. 77-92, (2013).
- [9] E.F. Toro, *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows*, John Wiley & Sons, (2001).
- [10] E.F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*, Springer Verlag, (2009).